§1: BẤT ĐẲNG THỨC

TÓM TẮT

❶Bất đẳng thức Cauchy.

Với hai số không âm a, b. Ta có: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

➲ Mở rộng cho n số không âm $a_1,a_2,...,a_n$

Ta có: $a_1+a_2+...+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$.

❷Bất đẳng thức BUNHIACOPXKI.

Cho a_1,a_2,b_1,b_2 là những số thực. Ta có: $(a_1.b_1+a_2.b_2)^2\le(a_1^2+a_2^2).(b_1^2+b_2^2)$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

➲ **Hệ quả:**

❑ Nếu $x,y>0$ và $x+y=const$ thì xy lớn nhất $\Leftrightarrow x=y$.

❑ Nếu $x,y>0$ và $xy=const$ thì $x+y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=y$.

Bài tập tự luyện

Bài 1) Cho $a,b,c,d,e\in R$. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$	**b)** $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$
c) $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$	**d)** $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc-ca)$
e) $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$	**f)** $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$
g) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$	**h)** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}},(a,b,c>0)$
i) $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca},(a,b,c\ge 0)$	**j)** $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

Bài 2) Cho $a,b,c\in R$. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, (a,b \ge 0)$	**b)** $a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3$
c) $a^4+3 \ge 4a$	**d)** $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc, (a,b,c \ge 0)$
e) $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \ge \frac{2}{1+ab}, (ab>1)$	**f)** $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$

Bài 3) Cho $a,b,c,d,e \in R$. Chứng minh rằng : $a^2+b^2 \ge 2ab \quad (1)$.

Áp dụng (1) để chứng minh bất đẳng thức sau:

a) $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge 8abc$.
b) $(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)(d^2+4) \ge 256abcd$.
c) $a^4+b^4+c^4+d^4 \ge 4abcd$.

Bài 4) Cho $a,b,c \in R$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \qquad (2)$.

Áp dụng (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$	**b)** $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$
c) $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$	**d)** $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$
e) $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}, (a,b,c>0)$	

Bài 5) Cho $a,b,c,d>0$. CMR : $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}(*)$.

Áp dụng $(*)$ chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$.

b) $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

Bài 6) Cho $a,b \ge 0$. CMR: $a^3+b^3 \ge a^2b+b^2a = ab(a+b)(3)$. Áp dụng (3) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{a^3+b^3}{ab}+\frac{b^3+c^3}{bc}+\frac{c^3+a^3}{ca} \ge 2(a+b+c)$.

b) $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \le 1$ với $a,b,c>0$ và $abc=1$.

Bài 7) Cho $a,b,c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2+b^2 \ge 2ab$	**b)** $2\left(a^2+b^2\right) \ge (a+b)^2$
c) $(a+b)^2 \ge 4ab$	**d)** $(a+b)(1+ab) \ge 4ab$
e) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 4$	**f)** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$
g) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$	**h)** $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \ge 8$
i) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$	**j)** $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \ge 8a^2b^2c^2$
k) $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9abc$	**l)** $(1+a+b)(a+b+ab) \ge 9ab$

Bài 8) Cho $a,b,c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức.

a) $a+b+c \ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$	**b)** $ab+bc+ca \ge \sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$
c) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \ge a+b+c$	**d)** $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
e) $ab+\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \ge a+b+1$	**f)** $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge a+b+c$
g) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge ab+bc+ca$	**h)** $\frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2+ca}+\frac{2}{c^2+ab} \le \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}$
i) $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \le ab$ với $a \ge 1,\ b \ge 1$	**j)** $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \ge \frac{9}{x^2+y^2+z^2}$ với $x,y,z \ne 0$

Bài 9) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức.

a) $y=\frac{x}{2}+\frac{18}{x},\ (\forall x>0)$

b) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x-1},\ (\forall x>1)$

c) $y=\frac{3x}{2}+\frac{1}{x+1},\ (\forall x>-1)$

d) $y=\frac{x}{3}+\frac{5}{2x-1},\ \left(\forall x>\frac{1}{2}\right)$

Bài 10) Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức.

a) $y=(x+3)(5-x),\ (-3 \le x \le 5)$

b) $y=x(6-x),\ (0 \le x \le 6)$

c) $y=(x+3)(5-2x),\ \left(-3 \le x \le \frac{5}{2}\right)$

d) $y=(2x+5)(5-x),\ \left(-\frac{5}{2} \le x \le 5\right)$